

Интеллектуальный марафон - 2016
Математика
Командный тур

№1

Постройте график функции: $y = \sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3}$

№2

Пусть O – внутренняя точка квадрата $ABCD$ со стороной $AB=1$, для которой выполняется равенство

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2.$$

Доказать, что O – центр квадрата.

№3

Решите уравнение:

$$(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1) + (2^{x^3} - 4) \sin x = 0.$$

№4

Найти десять натуральных чисел, куб каждого из которых нельзя представить в виде суммы простого числа и куба натурального числа. Обосновать ответ.

Интеллектуальный марафон - 2016
Математика
Личный тур

№1.

В строку выписано 2016 натуральных чисел: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$. Докажите, что либо одно из них делится на 2016, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 2016.

№2.

Решите уравнение $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cdot \cos^4 x$

№3.

Пусть в треугольнике ABC $AB=15, BC=7, AC=20$. Доказать, что $\angle A + 2\angle C = 90^\circ$.

№4.

Внутри квадрата с единичной стороной построено несколько окружностей, сумма длин которых равна 20. Докажите, что существует прямая, пересекающая по крайней мере 7 окружностей.

№5

На шахматной доске 8 на 8 двое играют в игру «кошки-мышки». У первого одна фишка – мышка, у второго несколько фишек–кошек. Все фишки ходят одинаково: вправо, влево, вверх или вниз на одну клетку. Если мышка оказалась на краю доски, то очередным ходом она спрыгивает с доски. Если кошка и мышка попадают на одну и ту же клетку, то кошка съедает мышку. Играющие ходят по очереди, причем второй передвигает своим ходом всех своих кошек сразу (разных кошек можно при этом сдвигать в разных направлениях). Начинает мышка. Она старается спрыгнуть с доски, а кошки стараются до этого ее съесть.

а) Пусть кошек всего две. Мышка уже поставлена на какую-то клетку не на краю. Можно ли так поставить кошек на краю доски, чтобы они сумели съесть мышку?

б) Пусть кошек три, но зато мышка имеет лишний ход: в первый раз она делает два хода подряд. Докажите, что мышка сможет убежать от кошек, каково бы ни было начальное расположение фишек.