

Интеллектуальный марафон

Математика

Командный тур

№1

В клетках таблицы 4×4 расставлены числа $-1, 0, 1$. Докажите, что какие-то две из 10 сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

№2

На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B , причём $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B . Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB . Найдите площадь треугольника ABC , где C — точка пересечения этих касательных.

№3

Сколько решений в целых числах имеет уравнение: $xy + 201x + 4y = 0$? Ответ обосновать.

№4

На окружности расположены 20 точек. Эти 20 точек попарно соединяются 10 *непересекающимися* хордами. Сколькими способами это можно сделать?

Личный тур

№1.

Докажите, что если α , β , γ - углы произвольного треугольника, то справедливо тождество $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 1$.

№2.

Пусть $f(x)=x^2+12x+30$. Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x))))))=0.$$

№3.

Докажите, что $17 + 17^2 + 17^3 + 17^4 + \dots + 17^{2013} + 17^{2014}$ делится нацело на 9.

№4.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AC \perp BD$.

Найдите длину BC , если расстояние от центра окружности до стороны AD равно 2.

№5

Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов четно. Один из столбов покрашен в желтый цвет, другой - в синий, а остальные – в белый. Назовем расстояние между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до желтого, если сумма расстояний от синего столба до белых равна 2014 км.